# 現在価値で考える 4step，ﾁｬｰﾄ，Focus の問題から

北海道札幌西高等学校　正田隆之

現在価値に着目した別解を紹介します。

**〔問題１〕数研出版 4step 数学Ｂ 発展問題 200 番**

西暦 2008 年 1 月 1 日に 100 万円を年率 7%で借りた人がいる。この返済は 2008 年 12 月 31 日を第 1 回とし，その後，毎年末に等額ずつ支払い，2010 年に完済することにする。毎年末に支払う金額を求めよ。ただし，$1.07^3=1.225$ として計算し，1 円未満は切り上げよ。

【解答】毎年末に $x$ 円ずつ支払うとする。借金 100 万円の 3 年後の元利合計は　$10^6\cdot 1.07^3$ 円

2010 年末に完済するとすると，毎年末に $x$ 円ずつ積み立てると考えたときの 3 回分の元利合計は $1.07^2x+1.07x+x$ これが $10^6\cdot 1.07^3$ 円と等しい。ゆえに

$$\frac{x(1.07^3-1)}{1.07-1}=10^6\cdot 1.07^3\qquad これを解くと$$

$$x=\frac{10^6\cdot 1.225\cdot 0.07}{0.225}=381111.1\cdots\cdots$$

よって，381,112 円ずつ支払う。

**まずは、模範解答の考え方　（下線部の根拠）**

**「今ある 100 万円は，機会を逸することなく合理的に運用され，どのような経路をたどっても 3 年後の元利合計が等しくなる」**という前提で方程式を立てる。

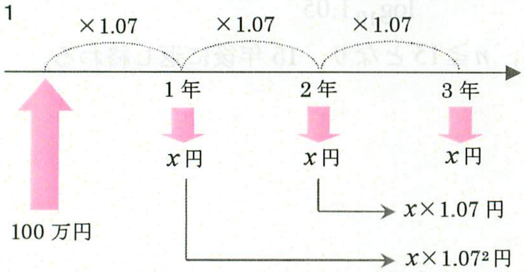
まず，条件より 100 万円を借りて 3 年後に期日一括返済する場合の返済金額を求めることができる。

$$100\text{万}\times 1.07^3\text{円}\quad\cdots\cdots①$$

これは，100 万円の 3 年後の元利合計を表している。

一方，本問の借入の毎回の支払額は，元金 100 万円の一部分の返済と，それにかかる利息の合計金額（元利合計）であり，これを $x$ 円とおく。

図１




（ⅰ）1 年後に支払う $x$ 円は，残り 2 年間を 1 年ごとに複利計算することにより 3 年後の元利合計となり，その金額は　　$x\times 1.07^2$ 円　　である。

（ⅱ）2 年後に支払う $x$ 円は，残り 1 年間の利息計算をすることにより 3 年後の元利合計となり，その金額は　　$x\times 1.07$ 円　　である。

（ⅲ）3 年後に支払う $x$ 円は，3 年後の元利合計そのものである。

（ⅰ）～（ⅲ）により，100 万円の 3 年後の元利合計は次のようになる。

$$x+x\times 1.07+x\times 1.07^2\text{ 円}\quad\cdots\cdots②$$

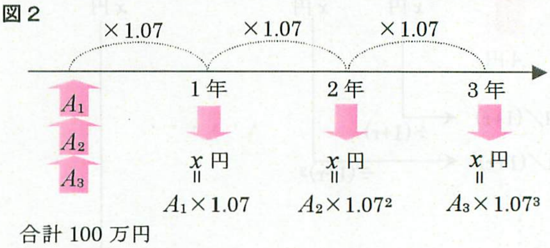
**いずれの方法によっても，100 万円に対する 3 年後の元利合計が等しくなるから，①と②は等しい。**

よって，次の方程式を得る。

$$x+x\times 1.07+x\times 1.07^2=100\text{万}\times 1.07^3$$

## 〔別解〕借入時点の金額（現在価値）で考える

図２




100 万円を 1 年後返済部分 $A_1$，2 年後返済部分 $A_2$，3 年後返済部分 $A_3$ に分けて考える。すなわち，

$$A_1+A_2+A_3=1{,}000{,}000\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ。$A_1$，$A_2$，$A_3$ それぞれについて，返済時の元利合計金額は

$$A_1\times 1.07\text{ 円}\quad A_2\times 1.07^2\text{ 円}\quad A_3\times 1.07^3\text{ 円}$$

これらが，すべて等しい金額 $x$ 円になるとすると，

$$A_1\times 1.07=x\quad A_2\times 1.07^2=x\quad A_3\times 1.07^3=x$$

よって，$A_1=\dfrac{x}{1.07}$　$A_2=\dfrac{x}{1.07^2}$　$A_3=\dfrac{x}{1.07^3}$

これらを①の式に代入して

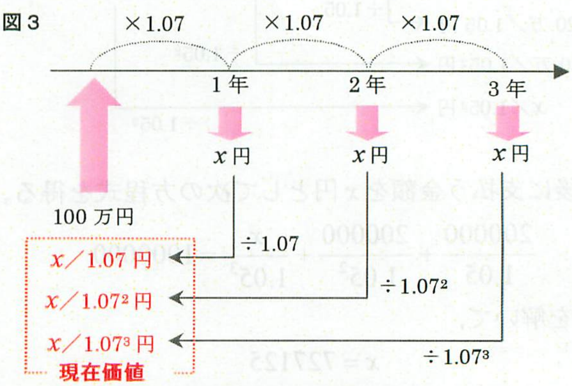
$$\frac{x}{1.07}+\frac{x}{1.07^2}+\frac{x}{1.07^3}=1{,}000{,}000\quad\cdots\cdots※$$

これを解いて　$x=381111.1111\cdots\cdots$

## 現在価値

模範解答では 3 年後の元利合計に着目しているのに対し，別解では借入時点の金額に着目している。※の左辺の各項は「返済時点の金額 $x$ 円」を「借入時点の価値すなわち，**現在価値**」に直したものである。

図３

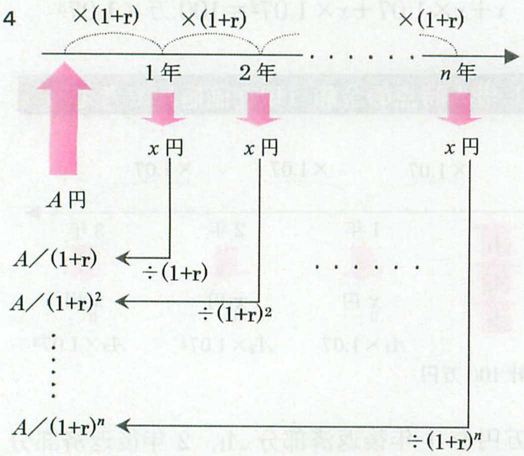


**〔問題２〕数研出版　改訂版　チャート式　（青）**
**基礎からの数学Ⅱ+B[ベクトル・数列]　練習 161**

> $A$ 円をある年の初めに借り，その年の終わりから同額ずつ」$n$ 回で返済する。年利率を $r$（$>0$）とし，1年ごとの複利法とすると，毎回の返済金額は $\square$ 円である。　〔芝浦工大〕

〔別解〕現在価値で考える

図４




毎回の支払額を $x$ 円として次の方程式を得る。

$$\frac{x}{1+r}+\frac{x}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{x}{(1+r)^n}=A$$

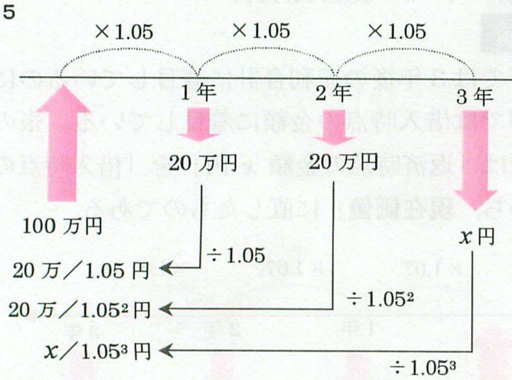
よって　$x=\dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ 円

**〔問題３〕**

> 年利率 5% で 100 万円を借りて，1年後と2年後に 20 万円ずつ支払い，3年後に残りを全額支払う。3年後に支払う金額を求めよ。ただし，利息は1年ごとの複利で計算すること。

〔解答〕現在価値で考える

図５




3年後に支払う金額を $x$ 円として次の方程式を得る。

$$\frac{200000}{1.05}+\frac{200000}{1.05^2}+\frac{x}{1.05^3}=1000000$$

これを解いて，

$$x=727125$$

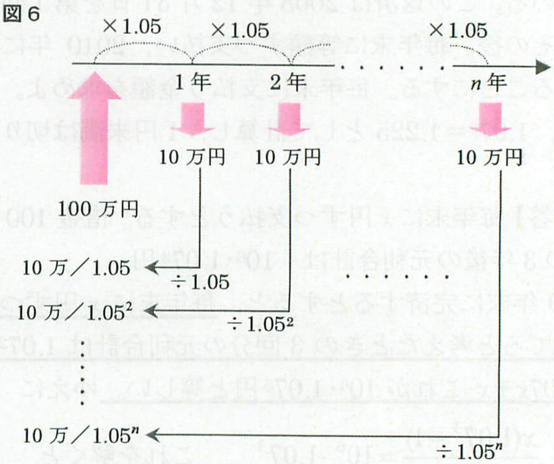
よって，3年後に支払う金額は　727125 円

**〔問題４〕　啓林館 FocusGold 数学Ⅱ+B 例題 248**

> 年利率 5% で 100 万円を借りて，ちょうど1年後から毎年 10 万円ずつ返すとき，何年後に返し終わるか。ただし，1年ごとの複利で計算し，$\log_{10}1.05=0.0212$，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

〔別解〕現在価値で考える

図６




$n$ 年後に返し終わるとし，支払う金額の現在価値の合計が 100 万円以上になることから次の不等式が成り立つ。

$$\frac{10}{1.05}+\frac{10}{1.05^2}+\frac{10}{1.05^3}+\cdots\cdots+\frac{10}{1.05^n}\geqq 100$$

両辺に　$\dfrac{1.05^n}{10}$　を掛けると

$$1+1.05+1.05^3+\cdots\cdots+1.05^{n-1}\geqq 10\times 1.05^n$$

$$\frac{1.05^n-1}{1.05-1}\geqq 1.05^n\qquad \text{よって，}\qquad 1.05^n\geqq 2$$

両辺の常用対数をとると　$\log_{10}1.05^n\geqq\log_{10}2$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}1.05=0.0212$ より，

$$n\geqq\frac{\log_{10}2}{\log_{10}1.05}=14.198\cdots\cdots$$

よって，$n\geqq 15$ となり，15 年後に返し終わる。